Uitwerkingen Calculus 2 tentamen d.d. 31 oktober 2007

Keimpe Nevenzeel

1.a De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert indien aan de volgende drie voorwaarden is voldaan:

- **de reeks alterneert, d.w.z. op een volgende termen hebben een verschillend teken;**
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- $|a_{n+1}| \le |a_n|$

Laat aan de hand van tegenvoorbeelden zien dat de voorwaarden 1. en 2. niet gemist kunnen worden. M.a.w. geef (zonder bewijs) een divergente reeks die

a. niet aan 1., maar wel aan 2. en 3. voldoet;

De reeks met $a_n = n^{-1}$.

b. niet aan 2., maar wel aan 1. en 3. voldoet.

De reeks met $a_n = \dfrac{(-1)^n 3n}{4n-1}$.

(Zie ook example 2 van par. 11.5, pg. 737.)

2. gegeven is de machtreeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n}$.

a. Bepaal de convergentiestraal R.

We gebruiken de Ratio Test:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-1)^n}{n}}\right| = |x-1|\left|\frac{n}{n+1}\right| \to |x-1| \quad \text{voor } n \to \infty.$$

Volgens de Ratio Test geldt als $|x-1| < 1$ dan is er convergentie en als $|x-1| > 1$ dan is er divergentie $\Rightarrow$ de Radius of Convergence is 1.

b. Bepaal alle (reële) x waarvoor de bovenstaande machtreeks convergeert.

Als $|x-1| < 1$ convergeert de reeks sowieso, dat is dus voor $x \in (0,2)$. Nu moeten we nog bepalen of de eindpunten ook convergeren.

Voor $x = 0$ krijgen we de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ en deze reeks divergeert.

Voor $x=2$ krijgen we de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Dit is een alternerende reeks, dus we gebruiken de Alternating Series Test. Definieer $b_n = n^{-1}$, dan

(i) Moeten we controleren of $b_n > b_{n+1}$.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

Aan dit criterium is dus inderdaad voldaan.

(ii) Moet $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Aan dit criterium is voldaan

Dus voor $x=2$ convergeert de reeks.

Dus voor $x \in (0,2]$ is er sprake van convergentie.

3. De functie f wordt gegeven door

$$f(x,y)=\frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

waarbij $(x,y)\neq(0,0)$.

a. Toon aan dat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ niet bestaat.

Als $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ bestaat dan moet de waarde van deze limiet niet afhangen van het pad dat je kiest om de limiet te benaderen. In anderen woorden: elk pad moet hetzelfde antwoord opleveren.

Eerst benaderen we de limiet over de *x*-as (dus $y=0$):

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2)}{x^2}.$$

Omdat zowel de teller en de noemer naar 0 gaan voor $n\to\infty$ kunnen we l'Hospital gebruiken:

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{\frac{\partial}{\partial x}\sin(x^2)}{\frac{\partial}{\partial x}x^2} = \lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{2x\cdot\cos(x^2)}{2x} = \lim_{(x,0)\to(0,0)}\cos(x^2)=1$$

Vervolgens benaderen we de limiet over de lijn $y=x$, dus over (x,x):

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = \lim_{(x,x)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2-x^2)}{x^2+x^2} = \lim_{(x,x)\to(0,0)}\frac{0}{2x^2}=0.$$

Voor beide paden krijgen we een andere limietwaarde, dus de limiet bestaat niet.

b. Bereken de partiele afgeleiden f_x en f_y (voor $(x,y) \neq (0,0)$).

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}\text{, dus}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x \cdot \cos(x^2-y^2)(x^2+y^2) - \sin(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x \cdot \left((x^2+y^2)\cdot \cos(x^2-y^2) - \sin(x^2-y^2)\right)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y \cdot \cos(x^2-y^2)(x^2+y^2) - \sin(x^2-y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2y \cdot \left(\cos(x^2-y^2)(x^2+y^2) + \sin(x^2-y^2)\right)}{(x^2+y^2)^2}$$

c. en d. behoren niet tot de tentamenstof dit jaar.

4. Deze opgave behoort niet tot de tentamenstof dit jaar.

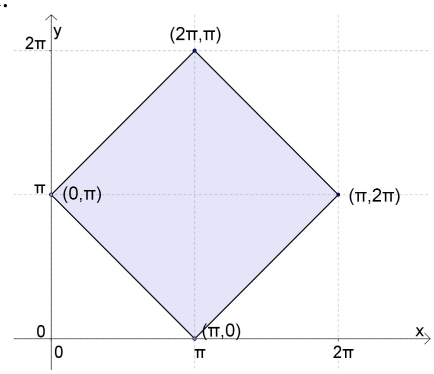
5. Beschouw de integraal

$$\iint_S (y-x)^2 \sin(x+y)\,dxdy \qquad \textbf{(1)}$$

Waarbij het integratie-gebied S een parallellogram in het xy-vlak is met hoekpunten $(0,\pi)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ en $(0,\pi)$.

a. Schets het integratie-gebied S.

Je krijgt het volgende gebied:



b. Bereken de Jacobiaan van deze coordinaat-transformatie.

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \tfrac{1}{2}(v-u) \\ y = \tfrac{1}{2}(v+u) \end{cases}$$

Hieruit volgt:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2}\,.$$

c. Beschrijf het gebied S in termen van de nieuwe coördinaten u en v.
We transformeren de vier grenslijnen van het oude gebied om de grenslijnen in het nieuwe gebied te vinden:
$y = x + \pi \Leftrightarrow y - x = \pi \Rightarrow$ de bovengrens van u wordt gegeven door $u = \pi$.
$y = x - \pi \Leftrightarrow y - x = -\pi \Rightarrow$ de ondergrens van u wordt gegeven door $u = -\pi$.
Dus $u \in [-\pi, \pi]$.

$y = -x + 3\pi \Leftrightarrow y + x = 3\pi \Rightarrow$ de bovengrens van v wordt door $v = 3\pi$.
$y = -x + \pi \Leftrightarrow y + x = \pi \Rightarrow$ de ondergrens van v wordt door $v = \pi$.
Dus $u \in [\pi, 3\pi]$.

d. Bereken de integraal (1).
Als we de coördinaten-transformatie doorvoeren krijgen we:

$$\iint_S (y-x)^2 \sin(x+y) dxdy = \tfrac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^2 \sin v \; dudv = \tfrac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi} \left[\tfrac{1}{3} u^3 \right]_{u=-\pi}^{\pi} \sin v \; \mathrm{d}v$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi^3 \int_{\pi}^{3\pi} \sin v \; \mathrm{d}v = \tfrac{1}{3}\pi^3 \left[-\cos v \right]_{v=\pi}^{3\pi} = 0$$

6. Een boei drijft op het water. Wanneer de boei een stukje onder water wordt geduwd gaat deze vervolgens op en neer bewegen. De uitwijking t.o.v. de rust toestand duiden we aan door $x(t)$; t is de tijd. De uitwijking voldoet aan de d.v.

$$100x'' = -16\pi x - d \cdot x'$$

waarbij c een constante is.
a. Los de karakteristieke vergelijking die bij de bovenstaande d.v. hoort op.
Je krijgt de volgende differentiaalvergelijking: $100x'' + d \cdot x' + 16\pi x = 0$.

We zien dat $(a,b,c) = (100, d, 16\pi)$, dus de discriminant $D = b^2 - 4ac = d^2 - 6400\pi$.
Om de oplossing van de karakteristieke vergelijking te bepalen gebruiken we de abc-formule:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-d \pm \sqrt{D}}{200}.$$

b. Aan welke voorwaarde moet d voldoen opdat $x(t)$ een periodieke functie is?
$x(t)$ is een periodieke functie als $d = 0$.

c. Hoe luidt de periodieke oplossing indien $x(0)=1$ en $x'(0)=0$?
Als $d=0$ dan is $D=-6400\pi<0$.

De algemene oplossing wordt dan gegeven door:

$$x(t)=e^{\alpha t}\left(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t\right).$$

met $\alpha=-b/(2a)=0$ en $\beta=\sqrt{4ac-b^2}/(2a)=0,40\sqrt{\pi}$.

De algemene oplossing wordt dus

$$x(t)=c_1\cos(0,40\cdot\sqrt{\pi}\cdot t)+c_2\sin(0,40\cdot\sqrt{\pi}\cdot t).$$

De randvoorwaarde $x(0)=1$ geeft:

$$x(0)=c_1=1 \;\Rightarrow\; c_1=1.$$

De randvoorwaarde $x'(0)=0$ geeft:

$$x'(0)=0,40\cdot\sqrt{\pi}\cdot c_2=0 \;\Rightarrow\; c_2=0.$$

De oplossing voor deze randvoorwaarden wordt daarmee:

$$x(t)=\cos(0,40\cdot\sqrt{\pi}\cdot t).$$